SESSION DE 1994

Option M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

Préambule

Le but du problème est l'étude d'un algorithme, donnant la solution positive de l'équation $X^2 = A$ dans l'ensemble des matrices carrées symétriques, définies positives. Les parties **I**, **II** et **III** sont indépendantes, mais une importance particulière est donnée à la partie III, qui n'est pas liée à son niveau de difficulté.

I

Soit a un réel strictement positif et une suite réelle définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

et u_0 un réel strictement positif.

I.*a.* Montrer que la suite (u_n) est convergente vers $\sqrt{a}$, et que cette convergence ne dépend pas du choix de u_0.

I.*b.* Montrer que pour tout K réel vérifiant $0 < K < 1$, la suite $(|u_n - \sqrt{a}|)$ converge vers 0 plus vite que la suite (K^n).

(Autrement dit, il existe $A > 0$ et n_0 tel que pour tout $n > n_0$: $0 \leqslant |u_n - \sqrt{a}| < AK^n$.)

I.*c.* En utilisant la suite (v_n) où $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$, donner un équivalent de $u_n - \sqrt{a}$.

I.*d.* Comparer $|u_{n+1} - \sqrt{a}|$ et $|u_{n+1} - u_n|$. En déduire un test d'arrêt permettant le calcul de $\sqrt{a}$ à l'aide de cette suite et donner un algorithme permettant le calcul de $\sqrt{a}$.

II

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n, définie positive. On définit une suite de matrices par :

$$X_0 = I_n \quad \text{et} \quad 2X_p = X_{p-1} + A(X_{p-1})^{-1}.$$

I_n désigne la matrice identité de l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ et $(X_{p-1})^{-1}$ désigne la matrice inverse de X_{p-1}.

II.*a.* Montrer que A est diagonalisable. On désignera par $(a) = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ une base de vecteurs propres de A et par Q la matrice de passage de la base initiale (e) à (a).

II.*b.* Montrer, en utilisant la base de vecteurs propres de A, que la suite (X_p) est convergente vers une matrice B, qui vérifie $B^2 = A$.

II.*c.* Montrer que la suite (X_p) converge vers l'unique matrice symétrique définie positive, notée B, qui vérifie $B^2 = A$.

III

On désire réaliser un programme Pascal utilisant **I** et **II**. On utilise une constante déclarée ainsi :

const MatMax = 10;

et on utilise les types :

Vecteur = Array [1..MatMax] of Real; Matrice = Array [1..MatMax, 1..MatMax] of Real;

On dispose des procédures suivantes (on ne demande pas de les écrire; et les en-têtes seulement vous sont données) :

Procédure Entre_Matrice (var A : Matrice; var n : integer) {cette procédure permet de rentrer une matrice de n lignes et n colonnes}

Procédure Affiche_Matrice (var A : Matrice; var n : integer) {cette procédure permet d'afficher une matrice de n lignes et n colonnes}

Procédure Produit_Mat (A, B : Matrice; Var C : matrice; n : integer) {cette procédure permet de multiplier des matrices de n lignes et n colonnes; le résultat est dans C}

Procédure Somme_Mat (A, B : Matrice; Var C : matrice; n : integer) {cette procédure permet d'additionner des matrices de n lignes et n colonnes; le résultat est dans C}

Procédure Mult_Scalaire (A : Matrice; t : real; Var C : matrice; n : integer) {cette procédure permet de multiplier une matrice de n lignes et n colonnes par t; le résultat est dans C}

Procédure Inverse_Matrice (A : Matrice; Var C : matrice; n : integer) {cette procédure permet d'inverser une matrice que l'on sait inversible de n lignes et n colonnes; le résultat est dans C}

Écrire les procédures suivantes dont l'en-tête seulement a été indiqué :

III.*a.* Function Test (X, Y : Matrice; epsilon : real; n : integer) : Booléen; {cette fonction calcule pour les matrices X et Y la valeur de $\max_{i,j} |X_{i,j} - Y_{i,j}|$ et renvoie un booléen suivant la valeur de $\max_{i,j} |X_{i,j} - Y_{i,j}| - \text{epsilon}$}.

III.*b.* Procedure Recurrence (A : Matrice; Var B : Matrice; n : integer) {elle permettra de calculer la matrice B définie au **II** et utilisera la fonction Test précédente}.

III.*c.* Écrire le programme principal pouvant utiliser toutes les procédures et les types de variables définis précédemment qui permettra le calcul de B lorsque la matrice A est donnée et d'afficher la matrice $B^2 - A$.